Príklad prirodzenej transformácie (Sylvia)

MV – MV-algebry
MVEA – MV-efektové algebry

$$\begin{tikzcd} MV \arrow[r, bend left=50, "U"] \arrow[r, bend right=50, "B"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow \varphi"] & MVEA \end{tikzcd}$$

U = zábudlivý funktor
B = R-generovaná BA

$F : M \longrightarrow K$ v MV

$$\begin{tikzcd} B(M) \arrow[r, "\varphi_M"] \arrow[d, "B(F)"'] & U(M) \arrow[d, "U(F)"] \\ B(K) \arrow[r, "\varphi_K"'] & U(K) \end{tikzcd}$$

štvorec v MVEA

Grupy

$[G,G]$ komutátorová podgrupa

$[G,G]$ = podgrupa generovaná prvkami

$[a,b] := a^{-1}b^{-1}ab$

Je to funktor

$G \xrightarrow{h} H$ $\qquad$ $[G,G] \xrightarrow{[h,h]} [H,H]$

Existuje prirodzená transformácia

$$
\begin{tikzcd}
Grp \arrow[r, bend left=50, "{[\,,\,]}"] \arrow[r, bend right=50, "id_{Grp}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & Grp
\end{tikzcd}
$$

Adjungované funktory

1) Izomorfizmus kategórií

Funktory sú morfizmy v Cat. Čo je izomorfizmus v Cat?

$$C \cong \mathcal{D}$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[loop left, "id_{\mathcal{C}}"] \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[loop right, "id_{\mathcal{D}}"] \arrow[l, bend left, "F^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

$$F \circ F^{-1} = id_{\mathcal{D}}$$
$$F^{-1} \circ F = id_{\mathcal{C}}$$

Toto je zriedkavý a nie veľmi užitočný vzťah. Problém je v objektoch

$$F \circ F^{-1}(A) = A$$

$\downarrow$

ten istý objekt

To znamená, že identita objektu musí prežiť.

To, čo naozaj potrebujeme, je toto

2) Ekvivalencia kategórií

$$\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D} \qquad \begin{array}{l} G\circ F \cong id_{\mathcal{C}} \\ F\circ G \cong id_{\mathcal{D}} \end{array}$$

CHaus $\rightleftarrows$ komutatívne unitálne C^* algebry

$$Fin^{op} \rightleftarrows Fin\,BA$$

konečné množiny

konečné Booleove algebry

Ako?

$$Fin^{op} \xrightarrow{P^*} FBA$$ → konečné Booleove algebry

$P^*(X)$ — potenčná množina

$P^*(F)$?

$f : X \longrightarrow Y \qquad P^*(f) : P^*(Y) \longrightarrow P^*(X)$

$$P^*(f)(A) = f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$$

$$X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$$

Funktorialita $\mathcal{P}^*(f\circ g)(A) = (f\circ g)^{-1}(A) =$

$A \subseteq Z$

$$= \{x\in X : (f\circ g)(x)\in A\} =$$

$$= \{x\in X : f(g(x))\in A\}$$

$$(\mathcal{P}^*(g)\circ \mathcal{P}^*(f))(A) = \mathcal{P}^*(g)\big(\mathcal{P}^*(f)(A)\big) =$$

$$= \mathcal{P}^*(g)\big(\{y\in Y : f(y)\in A\}\big) =$$

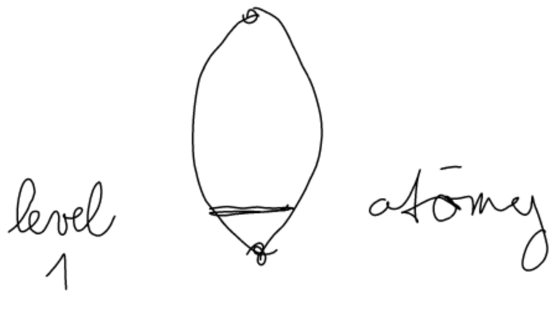
$$= \{x\in X : g(x)\in \{y\in Y : f(y)\in A\}\}$$

$$= \{x\in X : g(x) = y \ \&\ f(y)\in A\} =$$

$$= \{x\in X : f(g(x))\in A\}$$

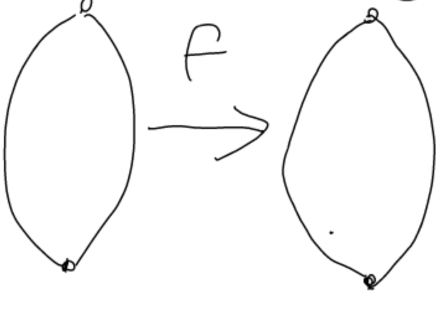
$$FBA \xrightarrow{at} Fin^{op}$$

„vezmi atómy"



Ako to funguje na morfizmoch?

A B — Booleove algebry



$$at(f) : at(B) \to at(A)$$

$$at(f)(b) = \bigwedge\{x : f(x) = b\}$$

$at(f)(b)$ je atóm?

$f(at(f)(b)) = b > 0$, teda $at(f)(b) > 0$

Predpokladajme, že

$$y \vee z = at(f)(b)$$

$$y \vee z = \bigwedge\{x : f(x) = b\}$$

$f(y) \vee f(z) = b$ atom of B

$f(y) = b$ or $f(z) = b$

$y \geq at(f)(b)$ or $z \geq at(f)(b)$

$y = at(f)(b)$ or $z = at(f)(b)$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fin} \arrow[r, shift left, "P^*"] & \mathrm{FinBA} \arrow[l, shift left, "at"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{c} X \\ \cong \\ at \circ P^*(X) = \{\{x\} : x \in X\} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} P^* \circ at(A) = \{Y : Y \subseteq at(A)\} \\ \cong \\ A \end{array}$$

iba izomorfizmus

Nedokončím to. Ideme na adjungované funktory.

Definícia: (normálne je definícia iná a toto je charakterizácia)

Nech $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ sú kategórie a funktory

Nech $\eta : id_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF$ (šípka v $[\mathcal{D},\mathcal{D}]$)

$\varepsilon : FG \longrightarrow id_{G}$ (šípka v $[\mathcal{C},\mathcal{C}]$)

sú také, že

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "id_F"'] & FGF \arrow[d, "\varepsilon F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "id_G"'] & GFG \arrow[d, "G\varepsilon"] \\ & G \end{tikzcd}$$

$[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ $\qquad$ $[\mathcal{D},\mathcal{C}]$

komutujú

Potom F, G sú adjungované funktory

$\left.\begin{array}{l} F \text{ je ľavý adjoint} \\ G \text{ je pravý adjoint} \\ \eta \text{ je unit} \\ \varepsilon \text{ je counit} \end{array}\right\}$ konvenčné písmená

Trojuholníky sú rovnosti $\varepsilon F \circ F\eta = id_F$

$G\varepsilon \circ \eta G = id_G$

Ak vezmeme $X \in \mathcal{C}$ ($Y \in \mathcal{D}$) z trojuholníkov máme

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(\eta_X)"] \arrow[dr, "id_{F(X)}"'] & FGF(X) \arrow[d, "\varepsilon_{F(X)}"] \\
& F(X)
\end{tikzcd}$$

komutuje v $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[r, "\eta_{G(Y)}"] \arrow[dr, "id_{G(Y)}"'] & GFG(Y) \arrow[d, "G(\varepsilon_Y)"] \\
& G(Y)
\end{tikzcd}$$

komutuje v $\mathcal{D}$

Príklad

$$\begin{tikzcd}
Set \arrow[r, bend left, "F"] & Mon \arrow[l, bend left, "U"]
\end{tikzcd}$$

F – voľný monoid

U – zábudlivý funktor

$\{[a_1 a_2 \dots, a_n] : a_i \in X\} = X^*$ slová nad X

[ ] prázdne slovo

zreťazovanie $[a_1 \dots a_n] * [b_1 \dots b_k] =$
$= [a_1 \dots a_n b_1 \dots b_k]$

$F(X) = (X^*, [\,], \circ)$

$G(A, e, \circ) = A$

$\eta_X : X \longrightarrow GF(X) = X^*$

$a \in X \quad \eta_X(a) = [a]$

$(A, e, \circ)$

$\varepsilon_A : FG(A, e, \circ) \longrightarrow A$ šípka v Mon

$\| $

$(A^*, [\,], \circ) \longrightarrow A$

$\varepsilon_A([a_1 \ldots a_n]) = a_1 \circ \ldots a_n$

„vyčíslenie"

Treba overiť

- prirodzenosť η, ε
  (2 štvorce)
- obe trojuholníkové rovnosti