PRIRODZENÉ TRANSFORMÁCIE (pokr.)

Kategória Rel

- objekty: množiny
- morfizmy: relácie

~~takto~~:

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$$f \subseteq X \times Y \qquad x \in X \quad y \in Y$$

$$(x, y) \in f \text{ ozn. } x f y$$

- skladanie relácií

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

- id_X je diagonála $\{(x,x) : x \in X\}$

$$g \circ f \subseteq X \times Z$$

$$x (g \circ f) z :\Longleftrightarrow \exists y \in Y$$

$$x f y \quad y g z$$

$P : Rel \longrightarrow Rel$ funktor ~~ako~~?

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$\rightsquigarrow$ kladáme

$$P(X) \xrightarrow[P(f)]{} P(Y)$$

$$A \in P(X) \qquad B \in P(Y)$$

$$A \, P(f) \, B :\Longleftrightarrow$$

$$B = \{ y \in Y \mid \exists x \in A : x f y \} =$$

$$= f[A]$$

Najdeme přirozenou transformaci $\mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon} \mathrm{id}_{Rel}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(X) \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "\mathcal{P}(F)"'] & X \arrow[d, "F"] \\
\mathcal{P}(Y) \arrow[r, "\varepsilon_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$\varepsilon_X \subseteq \mathcal{P}(X) \times X$

$A (F \circ \varepsilon_X) y \iff$

$\exists t \in X \ (A \varepsilon_X t) \& (t F y)$

$A (\varepsilon_Y \circ \mathcal{P}(F)) y \iff$

$\exists B \in \mathcal{P}(Y):$

$(A \mathcal{P}(F) B) \& (B \varepsilon_Y y)$

$A \mathcal{P}(F) B \iff B = \{ y \in Y \mid \exists x \in A : x F y \}$

Položme $A \varepsilon_X t :\equiv A \ni t$ ... hotovo.

Spomeňme si, že $F: G \longrightarrow \mathcal{C}$ bola reprezentácia grupy. Teda reprezentácia grupy je funktor, čo je prirodzená transformácia reprezentácií?

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "H"'{name=D}] & \mathcal{C} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

prvok grupy

$$\begin{tikzcd} * \arrow[d, "f"] \\ * \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(*) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[d, "F(f)"'] & H(*) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(*) \arrow[r, "\alpha_*"] & H(*) \end{tikzcd}$$

$$G(f) \circ \alpha_* = \alpha_* \circ F(f)$$

diagram v $\mathcal{C}$

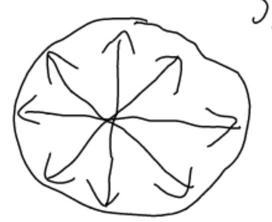
toto sa volá ekvivariantné zobrazenie

Položme

$G = \mathbb{Z}_2$

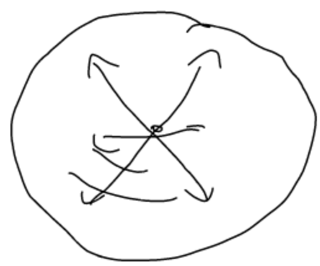
$\mathcal{C} = \mathrm{Top}$

F :



S_1, antipodalita

G :



S_2, antipodalita

α_* je šípka v Top ako?

Spomeňme si, že posety (alebo preordery) sú kategórie; izotónne zobrazenia sú potom funktory.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & Q \end{tikzcd}$$

čo je prirodzená transformácia?

Šípka v P je fakt, že $a \leq b$; $a \to b$

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r] \arrow[d] & G(a) \arrow[d] \\ F(b) \arrow[r] & G(b) \end{tikzcd}$$

má komutovať v Q.

S komutovaním nie je problém (poset!), šípky však musia existovať!

Prirodzená transformácia $F \to G$ je proste fakt, že

$$\forall x \in P : F(x) \leq G(x)$$

NOVÉ OZNAČENIA

- Ak $\mathcal{C}$ je kategória, potom množinu všetkých šípok medzi objektami X, Y značíme

$$\mathcal{C}(X,Y) \quad ; \text{ alebo } \quad Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$$
$$; \text{ alebo } \quad Hom(X,Y),$$

ak je $\mathcal{C}$ jasné.

- Ak $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sú kategórie, množinu funktorov z $\mathcal{C}$ do $\mathcal{D}$ značíme $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$

  $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ je <u>kategória</u>! Šípky sú prirodzené transformácie:

  Môžeme šípky skladať?

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, bend left=60, "F"{name=F}] \arrow[rr, "G"{name=G}] \arrow[rr, bend right=60, "H"'{name=H}] & & \mathcal{D}
\arrow[from=F, to=G, Rightarrow, "\alpha"'] \arrow[from=G, to=H, Rightarrow, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "Gf"'] & HX \arrow[d, "Hf"'] \\
FY \arrow[r, "\alpha_Y"'] & GY \arrow[r, "\beta_Y"'] & HY
\end{tikzcd}$$

$\longrightarrow$ ak komutujú vnútorné štvorce, komutuje vonkajší obdĺžnik; $\beta_Y \circ \alpha_Y$ je teda prirodzená transf.

Čo je id_F?

$$\begin{tikzcd}
FX \arrow[r, "id_{FX}"] \arrow[d, "Ff"'] & FX \arrow[d, "Ff"] \\
FY \arrow[r, "id_{FY}"'] & FY
\end{tikzcd}$$

Teda $[G, \mathcal{C}]$ je napríklad kategória reprezentácií grupy G v kategórii $\mathcal{C}$

Nadpájanie (whiskering) uvažujme takúto situáciu:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, bend right=60, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \arrow[r, "H"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

Existuje prirodzená transformácia $HF \to HG$?

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

toto komutuje v $\mathcal{D}$

Pôsobíme na ten štvorec H:

$$\begin{tikzcd} HF(A) \arrow[r, "H\alpha_A"] \arrow[d, "HF(f)"'] & HG(A) \arrow[d, "HG(f)"] \\ HF(B) \arrow[r, "H\alpha_B"'] & HG(B) \end{tikzcd}$$

H je funktor, zachováva skladanie, ergo:

toto komutuje v $\mathcal{E}$

Ale to je prirodzená transformácia $HF \to HG$!
značíme ju $H\alpha$

Toto zjavne ide ale skúsme sa pristaviť a vyskúšať si to

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Set} \arrow[r, bend left, "id_{Set}"] \arrow[r, bend right, "P"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathrm{Set} \arrow[r, "P"] & \mathrm{Set} \end{tikzcd}$$

Máme dostať

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Set} \arrow[r, bend left, "P"] \arrow[r, bend right, "P^2"'] \arrow[r, phantom, "P\eta \Downarrow"] & \mathrm{Set} \end{tikzcd} \qquad P(X) \xrightarrow{P\eta} P^2(X)$$

$A \in P(X)$

$$P\eta(A) = \{\eta(x) : x \in A\} =$$
$$= \{\{x\} : x \in \{A\}\}$$

$$P\eta(\{1,2,3\}) = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$$

Môžeme nadpájať aj naopak:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "H"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

$A \xrightarrow{f} B$ v $\mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} FH(A) \arrow[r, "\alpha_{HA}"] \arrow[d, "FH(f)"'] & GH(A) \arrow[d, "GH(f)"] \\ FH(B) \arrow[r, "\alpha_{HB}"] & GH(B) \end{tikzcd}$$

Zase príklad

$$\begin{tikzcd} Set \arrow[r, "P"] & Set \arrow[r, bend left=50, "id_{Set}"] \arrow[r, bend right=50, "P"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta"] & Set \end{tikzcd}$$

Zase

$$\begin{tikzcd} Set \arrow[r, bend left=50, "P"] \arrow[r, bend right=50, "P^2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta P"] & Set \end{tikzcd}$$ ale inak

$$\eta_{P(X)} : P(X) \longrightarrow P^2(X)$$

$$\eta_{P(X)}(A) = \{A\}$$

Šípku naopak sme mali:

$$\varepsilon : P^2 \longrightarrow P$$

$$\varepsilon_X : P^2(X) \longrightarrow P(X)$$

$$\varepsilon_X(\{A_i\}_{i \in I}) = \bigcup_{i \in I} A_i$$

$$\begin{tikzcd} P^2 \arrow[r, bend left=40, "\varepsilon"] & P \arrow[l, bend left=20, "\eta P"'] \arrow[l, bend left=60, "P\eta"] \end{tikzcd}$$

V akom sú tie prirodzené transformácie vzťahu?

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon \circ \eta\mathcal{P} &= id_{\mathcal{P}} \\ \varepsilon \circ \mathcal{P}\eta &= id_{\mathcal{P}} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \text{toto je ale}$$

komutatívny diagram v kategórii [Set, Set]

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "\eta\mathcal{P}"] \arrow[dr, "id_{\mathcal{P}}"'] & \mathcal{P}^2 \arrow[d, "\varepsilon"] & \mathcal{P} \arrow[l, "\mathcal{P}\eta"'] \arrow[dl, "id_{\mathcal{P}}"] \\
& \mathcal{P} &
\end{tikzcd}$$

oba trojuholníky komutujú

Prečo?

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(X) \arrow[r, "\eta_{\mathcal{P}(X)}"] \arrow[dr, "id_{\mathcal{P}(X)}"'] & \mathcal{P}^2(X) \arrow[d, "\varepsilon_X"] & \mathcal{P}(X) \arrow[l, "\mathcal{P}(\eta_X)"'] \arrow[dl, "id_{\mathcal{P}(X)}"] \\
& \mathcal{P}(X) &
\end{tikzcd}$$

Tento diagram komutuje v Set. Ponaháňajme prvky $\mathcal{P}(X)$:

$\mathcal{P}(X) \ni A = \{x_i\}_{i \in I}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, equal] & \{A\} \arrow[d, "\bigcup"] \\
& A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\{\{x_i\}\}_{i \in I} \arrow[d, "\bigcup"'] & A \arrow[l, mapsto] \arrow[dl, equal] \\
A &
\end{tikzcd}$$