Definícia: Kategória $\mathcal{C}$: 2 triedy : - objekty $\mathcal{C}_0$
- šípky, morfizmy $\mathcal{C}_1$

$f : A \longrightarrow B$

$A \xrightarrow{f} B$

- domain
- source
- obor
- zdroj

- codomain
- target
- koobor
- cieľ

formálne: $\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$

- skladanie

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longmapsto A \xrightarrow{g \circ f} C$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- každý objekt má identitu

$A \xrightarrow[\substack{id_A \\ 1_A}]{} A$,

ktorá sa chová na skladanie ~~takto~~:

$$1_A \circ f = f \circ 1_A = f$$

Príklady kategórií: - Set, Grp, Rng, Vect$_K$ (konkrétne)
- Rel

množiny, zobrazenia

2 extrémne príklady

- Každý monoid je kategória

  - Def.: monoid $(M, \circ, 1)$

    M – množina, $\circ$ – bin. operácia, 1 – konštanta

    $\forall a, b, c \in M$:

    $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

    $a \circ 1 = 1 \circ a = a$

  Ako nahliadnuť monoid ako kategória

  - objekt: $*$ (1 objekt, anonymný)
  - šípky: M
  - id$_*$ je jednotka $* \circlearrowleft a \in M$

  skladanie je násobenie v M

- Každý preorder je kategória

  Preorder $(A, \leq)$

  A – množina, $\leq$ – relácia na A $\quad \leq \subseteq A \times A$

  $\forall a, b, c \in A$

  (reflexivita) $a \leq a$

  (tranzitivita) $\left.\begin{array}{c} a \leq b \\ \& \\ b \leq c \end{array}\right\} \Rightarrow a \leq c$

Ako nahliadnuť preorder ako kategóriu

- objekty : A
- šípky : $a \leq b$ je $a \to b$
- skladanie

$$(a \leq b) \circ (b \leq c) = (a \leq c)$$

- identita

$$id_a = (a \leq a)$$

izomorfizmy sem (nie epi, mono)

Komutatívne diagramy

Nech f, g, h sú morfizmy v kategórii $\mathcal{C}$

$f : A \to B$
$g : B \to C$
$h : A \to C$

Také, že $h = g \circ f$

Celé to zapíšeme obrázkom

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

+ informácia : „diagram komutuje“

Môžeme mať aj zložitejšie diagramy

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\ C \arrow[r, "k"'] & D \end{tikzcd}$$

komutuje

znamená $h \circ f = k \circ g$, plus informácia o oboroch a koboroch;

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] & C \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & E \arrow[d, "h_3"] \\ B \arrow[r, "g_1"'] & D \arrow[r, "g_2"'] & F \end{tikzcd}$$

Môžeme uvažovať v obrázkoch:

ak vnútorné štvorce komutujú, vonkajší obdĺžnik komutuje; táto obrázková úvaha reprezentuje normálne odvodenie:

Predpoklady:

$$h_2 \circ f_1 = g_1 \circ h_1$$
$$h_3 \circ f_2 = g_2 \circ h_2$$

$\_ \circ f_1$

$$h_3 \circ f_2 \circ f_1 = g_2 \circ \underline{h_2 \circ f_1}$$
$$\| \qquad \downarrow$$
$$g_2 \circ \underline{g_1 \circ h_1}$$

Komutatívne diagramy sú iba spôsob zápisu rovností vzhľadom na $\circ$.

KONŠTRUKCIE

Súčin:

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ kategórie;

$\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ je kategória:

- objekty: dvojice (C, D) $\quad C \in \mathcal{C}_0, D \in \mathcal{D}_0$
- šípky: dvojice šípok (f_1, f_2) $\quad f_1 \in \mathcal{C}_1, f_2 \in \mathcal{D}_1$
- skladanie:

$$(f_1, f_2) \circ (g_1, g_2) = (f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2)$$

Opozitná kategória

$\mathcal{C}^{op}$ — objekty: rovnaké $A^{op} = A$

— šípky rovnaké ale opačným smerom

$A \xrightarrow{f} B$ v $\mathcal{C}$

$B \xrightarrow{f} A$ v $\mathcal{C}^{op}$

skladanie: rovnaké

Šípková kategória

$\mathcal{C}^{\to}$

objekty: šípky v $\mathcal{C}$

šípky: dvojice šípok v $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h_1"'] & C \arrow[d, "h_2"] \\
B \arrow[r, "g"'] & D
\end{tikzcd}$$

$(h_1, h_2): f \to g$ v $\mathcal{C}^{\to}$, ak diagram komutuje v $\mathcal{C}$

FUNKTORY

Funktor je morfizmus kategórií

$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ je dvojica zobrazení

$F : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$ objekty $F(A), F(B)$

$\mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}_1$ morfizmy $F(f), F(g)$

ktoré zachovávajú to podstatné:

$$F(id_A) = id_{F(A)}$$

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

aby to dávalo zmysel, musia sedieť obory a koobory:

$$A \xrightarrow{f} B \Rightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$$

Príklady funktorov:

1) Konštantný funktor Δ_A (diagonálny)

$\Delta_A : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

A je objekt;

$\forall C \in \mathcal{C}_0 \quad \Delta_A(C) = A$

$\forall f \in \mathcal{C}_1 \quad \Delta_A(f) = id_A$

2) identický funktor

$id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

$id_{\mathcal{C}}(A) = A$

$id_{\mathcal{C}}(f) = f$

3) zábudlivé funktory (redukty)

$U : Grp \to Set$

- grupa ide na množinu prvkov
- morfizmy idú na zobrazenia

4) ak pochopíme monoidy (grupy) ako kategórie s jediným objektom,

$F : G_1 \to G_2$ je to isté, ako homomorfizmus grúp.

5) Ak G je grupa, čo je funktor

$F: G \longrightarrow Set$?

- G má jediný objekt $(*)$; ergo F vyberá jeden objekt $F(*)$
- prvky grupy sú šípky $\quad * \overset{f}{\circlearrowleft}$

  F ich zobrazuje na zobrazenia

  $$F(*) \longrightarrow F(*)$$

  jednotka grupy je id_*, $F(id_*) =$

  $= id(F(*))$

  $\downarrow$

  identické zobrazenie

- elementárnymi úvahami je možné teraz dospieť k tomu, že F je vlastne reprezentácia grupy, alebo akcia grupy na množine.

Ak teraz vezmeme miesto Set nejakú inú kategóriu, povedzme $Vect_{\mathbb{C}}$, dostaneme reprezentácie grupy v tejto kategórii

Povedať o $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ako o reprezentácii $\mathcal{C}$ vo vnútri $\mathcal{D}$

6) ak P, Q sú posety funktor $F: P \to Q$ je to isté, ako izotónne (neklesajúce) zobrazenie

$$F(a \leq b) \Rightarrow F(a) \leq F(b)$$

transformácia šípky

Funktory môžeme skladať (zrejmým spôsobom). Trieda všetkých kategórií a funktorov je tiež kategória. Powerset ;

PRIRODZENÉ TRANSFORMÁCIE

Prirodzená transformácia je morfizmus funktorov

Ako definovať morfizmus funktorov?

$$(F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}) \xrightarrow{?} (G: \mathcal{C} \to \mathcal{D})$$

Uvážme to, čo je podstatné: F, G berú veci z $\mathcal{C}$ a robia z nich veci v $\mathcal{D}$.

Morfizmus $F \to G$ musí prepojiť to, čo robí F na to, čo robí G

Vezmime šípku v $\mathcal{C}$: $A \xrightarrow{f} B$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"] \arrow[r, "F"] & F(A) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
B & F(B) \arrow[r, dashed] & G(B)
\end{tikzcd}
$$

Def

Nech $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sú kategórie, $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$

Prirodzená transformácia $F \xrightarrow{\alpha} G$ je kolekcia <u>šípok v $\mathcal{D}$</u> indexovaná <u>objektami v $\mathcal{C}$</u>

$$\alpha_X : F(X) \longrightarrow G(X)$$

taká, že pre každú šípku v $\mathcal{C}$ $f : A \longrightarrow B$ diagram

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}
$$

komutuje.

<u>Tento pojem je prvá skutočná prekážka</u>

PT sú všade, aj s nimi ako s PT robíme, ale <u>nie explicitne</u>

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Set} \arrow[r, bend left, "id_{Set}"] \arrow[r, bend right, "P"'] & \mathrm{Set} \end{tikzcd}$$

Toto sú 2 funktory.

Skúsme medzi nimi nájsť prir. transformáciu

Hľadáme:

- pre každú množinu X
- šípku v Set $id_{Set}(X) \xrightarrow{\eta_X} P(X)$, kde $id_{Set}(X) = X$
- tak aby pre každé zobrazenie $f: X \to Y$ diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"] & P(X) \arrow[d, "P(f)"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & P(Y) \end{tikzcd}$$

komutoval

ako „prirodzene" zobraziť $X \longrightarrow P(X)$?

$\eta_X(a) = \{a\}$

Vyrobili sme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Set} \arrow[r, bend left=50, "id"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "P"'{name=D}] & \mathrm{Set} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\eta"] \end{tikzcd}$$

Existuje prirodzená transformácia naopak? Nie, z triviálnych dôvodov

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(\emptyset) \arrow[r, "\alpha_\emptyset"'] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \emptyset \\ \{\emptyset\} \end{tikzcd}$$

$\{\emptyset\}$ – neprázdna množina

Skúsme niečo iné:

$$\begin{tikzcd} Set \arrow[r, bend left, "\mathcal{P}^2"] \arrow[r, bend right, "\mathcal{P}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow ?"] & Set \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}^2(X) \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "\mathcal{P}^2(f)"] & \mathcal{P}(X) \arrow[d, "\mathcal{P}(f)"] \\ \mathcal{P}^2(Y) \arrow[r, "\varepsilon_Y"'] & \mathcal{P}(Y) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \{X_i\}_{i\in I} \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \bigcup_{i\in I} X_i \arrow[d, mapsto] \\ \{f(X_i)\}_{i\in I} \arrow[r, mapsto] & \bigcup_{i\in I} f(X_i) \stackrel{?}{=} f\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \end{tikzcd}$$

A to je vlastne to tvrdenie

Fungovali by prieniky?

Determinanty ako prir. transformácie

Ring : Kategória okruhov s homomorfizmami ako šípkami.

Mon : Kategória monoidov

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ring} \arrow[r, bend left=50, "M_n"] \arrow[r, bend right=50, "U"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathrm{Mon} \end{tikzcd}$$

$n \in \mathbb{N}$ fixné

M_n – matice, násobenie

U – redukt

A, B okruhy $\quad A \xrightarrow{f} B$ v Ring

$$\begin{tikzcd} M_n(A) \arrow[r, "\det_A"] \arrow[d, "M_n(f)"] & U(A) \arrow[d, "U(f)"] \\ M_n(B) \arrow[r, "\det_B"] & U(B) \end{tikzcd}$$

$\downarrow$

morfizmus v Mon

Inform: det je polynóm!

$$\begin{tikzcd} (\quad) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \det(\quad) \arrow[d, mapsto] \\ (f(\cdot) \cdots) \arrow[r, mapsto] & \det\begin{pmatrix} f(\cdot) \cdots \cdots f(\;) \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

$f\left(\det\begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix}\right) =$