

Definiēta: Kategorija: 2. līmenis: - objekti  
 $\mathcal{C}_0$   
 - šķēķi, morfismi  
 $\mathcal{C}_1$

$$F: A \longrightarrow B$$

$$A \xrightarrow{F} B$$

- domain
- source
- šķēķis
- izotips

- codomain
- target
- koobjekts
- mērķis

formālie:

$$\mathcal{C}_1 \longrightarrow \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0$$

- saskaitīšana

$$A \xrightarrow{F} B \xrightarrow{g} C \quad \longmapsto \quad A \xrightarrow{g \circ F} C$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- katrā objektā ir identitāte

$$A \xrightarrow{\text{id}_A} A, \quad \text{id}_A = 1_A$$

kas ir saistīts ar saskaitīšanu  
 fakts:

$$1_A \circ f = f \circ 1_A = f$$

Příklady kategorií: - Set, Grp, Ring, Vect<sub>K</sub> (konkrétně)  
 - Rel

↓  
 množiny  
 zobrazení

2 extrémne příklady

- Každý monoid je kategorie

- Def.: monoid  $(M, \cdot, 1)$  → konstanta  
 množina      bin. operace

$$\forall a, b, c \in M: \\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Sklopné je násobení  $\cdot$  v  $M$

Ako nahliadnuť monoid ako kategorie

- objekt:  $*$  (1 objekt, anonymný)
- šípky:  $M$
- id  $*$  je jednotka  $*$   $\begin{pmatrix} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{pmatrix} a \in M$

- Každý preorder je kategorie

Preorder  $(A, \leq)$

množina      relácia na  $A$        $\leq \subseteq A \times A$

$$\forall a, b, c \in A$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{(reflexivita)} \quad a \leq a \\ \text{(transitivita)} \quad a \leq b \\ \quad \quad \quad \quad \quad \& \\ \quad \quad \quad \quad \quad b \leq c \end{array} \right\} \Rightarrow a \leq c$$

ako nahliadnuť preorder ako kategóriu

- objekty:  $A$

- šípky:  $a \leq b$  je  $a \rightarrow b$

- skladanie

$$(a \leq b) \circ (b \leq c) = (a \leq c)$$

- identita

$$\text{id}_a = (a \leq a)$$

izomorfizmy sem (nie epi, mono)  
Komutatívne diagramy

Nech  $f, g, h$  sú morfizmy v kategórii  $\mathcal{C}$

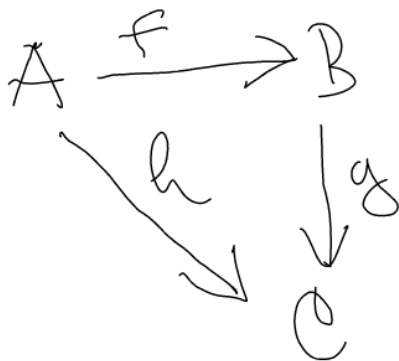
$$f: A \rightarrow B$$

$$g: B \rightarrow C$$

$$h: A \rightarrow C$$

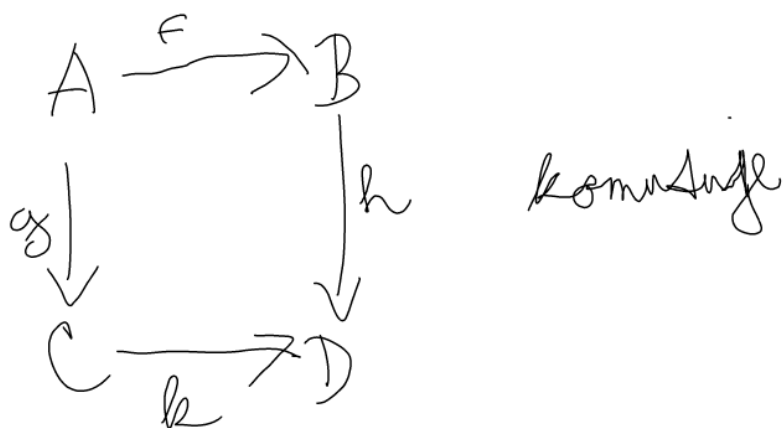
Chceme, že  $h = g \circ f$

Celé to zapíšeme obrázkom

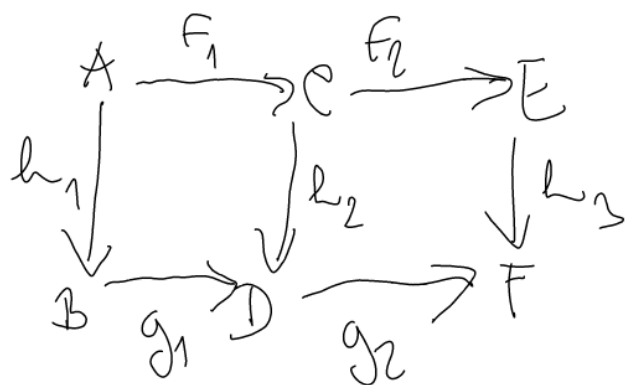


+ informácia: „diagram komutuje“

Môžeme mať aj složitější diagramy



znamena  $h \circ f = k \circ g$ , plus  
informacia o obrazoch a koobrazoch;



Môžeme nazvať v obrázkoch:

ak sú čiarne šorce komutujú, vonkajší  
obdelník komutuje; fada obrázková  
inaka reprezentuje normálne odobrenie:

Předpoklady:

$$h_2 \circ f_1 = g_1 \circ h_1$$

$$h_3 \circ f_2 = g_2 \circ h_2$$

---

$$h_3 \circ f_2 \circ f_1 = g_2 \circ h_2 \circ f_1 \leftarrow \text{of}_1$$
$$\parallel \quad \downarrow$$
$$g_2 \circ g_1 \circ h_1$$

Komutativní diagramy sříbe způsob sepsání rovnosti vzhledem ke 0.

## KONSTRUKCE

Učín:

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$  kategorie;

$\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  je kategorie:

- objekty: dvojice  $(C, D)$

$$C \in \mathcal{C}_0, D \in \mathcal{D}_0$$

- šipky: dvojice šipek  $(f_1, f_2)$

- skladání:  $f_1 \in \mathcal{C}_1, f_2 \in \mathcal{D}_1$

$$(f_1, f_2) \circ (g_1, g_2) = (f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2)$$

# Opozitná kategória

$\mathcal{C}^{op}$

- objekty: rovnaké  $A^{op} = A$

- šípky rovnaké ale opačným smerom

$$A \xrightarrow{F} B \quad \text{v } \mathcal{C}$$

$$B \xrightarrow{F} A \quad \text{v } \mathcal{C}^{op}$$

skladanie: rovnaké

# Šipková kategória

$\mathcal{C}^{\rightarrow}$

objekty: šípky  $\text{v } \mathcal{C}$

šípky: dvojice šípok  $\text{v } \mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & C \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ B & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

$$(h_1, h_2): f \rightarrow g$$

$\text{v } \mathcal{C}^1$ , ak

diagram komutuje

$\text{v } \mathcal{C}^0$

# FUNKTOZY

Funktor je morfismus kategorií

$F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  je dvojice zobrazení

$$\begin{array}{ccc} F: \mathcal{C}_0 \rightarrow \mathcal{D}_0 & \text{objektů} & F(A), F(B) \\ \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{D}_1 & \text{morfismů} & F(f), F(g) \end{array}$$

kteřé zachovává to podstatné:

$$F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$$

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

aby to dávalo smysl, musia sediet obory a koobory:

$$A \xrightarrow{f} B \quad \Rightarrow \quad F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$$

## Príklady funktorov:

1) Konštantný funktor  $\Delta_A$  (diagonálny)  
 $\Delta_A: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

$A$  je objekt;

$$\forall C \in \mathcal{C}_0 \quad \Delta_A(C) = A$$

$$\forall f \in \mathcal{C}_1 \quad \Delta_A(f) = \text{id}_A$$

2) identický funktor

$$\text{id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$\text{id}_{\mathcal{C}}(A) = A$$

$$\text{id}_{\mathcal{C}}(f) = f$$

3) redukčné funktory (redukty)

$$U: \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$$

- grupa ide na množinu prvkov

- morfizmy idu na zbrazenia

4) Ak pochopíme monoidy (grupy) ako kategórie s jedným objektom,

$F: \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$  je to isté, ako homomorfizmus grup.



5) Ak  $G$  je grupa, čo je funktor

$$F: G \rightarrow \text{Set} ?$$

-  $G$  má jediný objekt  $(*)$ ; ergo  $F$  vyberá  
jeden objekt  $F(*)$

- prvky grupy sú šípky  $* \xrightarrow{F}$   
 $F$  ich zobrasuje na zobrazenia

$$F(*) \rightarrow F(*)$$

$$\text{jednotka grupy je } \text{id}_*, \quad F(\text{id}_*) = \\ = \text{id}(F(*))$$

↓  
identické zobrazenie

- elementárnymi úvahami je možné  
Acoraz dospieť k tomu, že  $F$  je  
blasna reprezentácia grupy, alebo  
abcia grupy na množine.

Ak teraz vezmeme miesto  $\text{Set}$  nejakú  
inú kategóriu, povedzme  $\text{Vect } \mathbb{C}$ ,  
dostaneme reprezentácie grupy v tejto  
kategórii

Povedať o  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ako o  
reprezentácii  $\mathcal{C}$  vo vnútri  $\mathcal{D}$

6) ak  $P, Q$  sú posety funktor  
 $F: P \rightarrow Q$  je to isté, ako  
 izotónne (neklesajúce) zobrazenie  
 $F(a \leq b) \Rightarrow F(a) \leq F(b)$



transformácia šípky

Funktory môžeme skladat' (zrejým spôsobom).

Trieda všetkých kategórií a funktorov je tiež kategória. *PowerSet*;

## PRIRODZENÉ TRANSFORMÁCIE

Prirodzená transformácia je morfismus funktorov  
 ako definovať morfismus funktorov?

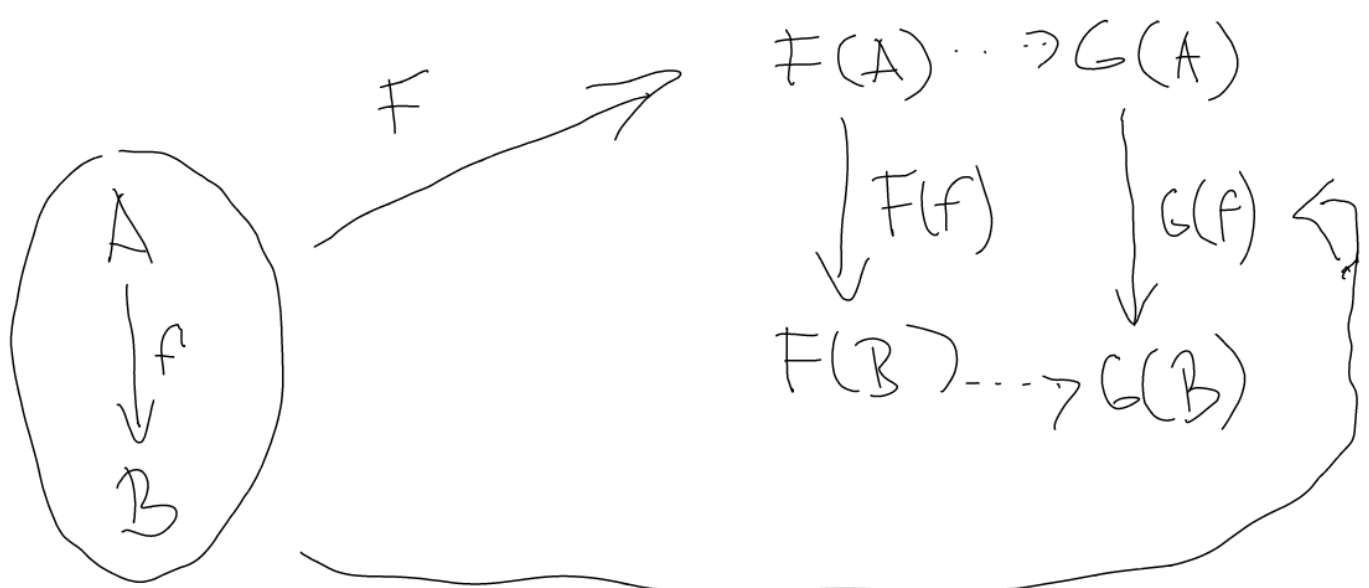
$$(F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}) \xrightarrow{?} (G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D})$$

Uvažujme to, čo je podstatné:  $F, G$

berú veci z  $\mathcal{C}$  a robia z nich veci v  $\mathcal{D}$ .

Morfismus  $F \rightarrow G$  musí prepojiť to, čo robí  $F$  na to, čo robí  $G$

Uzmime šípku v  $\mathcal{C}$ :  $A \xrightarrow{F} B$



Def

Nech  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  sú kategórie,  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$   
Prirodená transformácia  $F \xrightarrow{\alpha} G$  je kolekcia  
šípok v  $\mathcal{D}$  indexovaná objektami v  $\mathcal{C}$

$$\alpha_x: F(x) \rightarrow G(x)$$

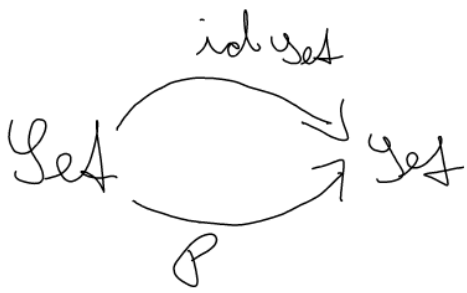
Taká, že pre každú šípku  $v \in \mathcal{C}$   $f: A \rightarrow B$   
 diagram

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\alpha_A} & G(A) \\ \downarrow F(f) & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\alpha_B} & G(B) \end{array}$$

komutuje.

Tento pojem je prvá štruktúrna prekážka

PT sú všade, aj s nimi ako s PT  
 robíme, ale nie explicitne



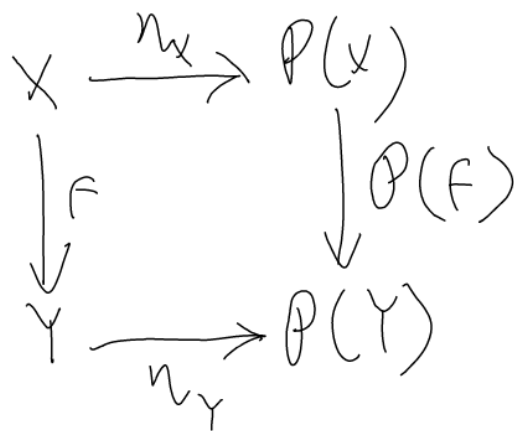
To sú 2 funkciony.

Skúsme medzi nimi nájsť princ. transformáciu

Hľadáme:

- pre každú množinu  $X$
- šípku v  $\text{Set}$   $\text{id}_{\text{Set}}(x) \xrightarrow{n_x} \mathcal{P}(X)$
- tak aby pre každé zobrazenie  $f: X \rightarrow Y$

diagram

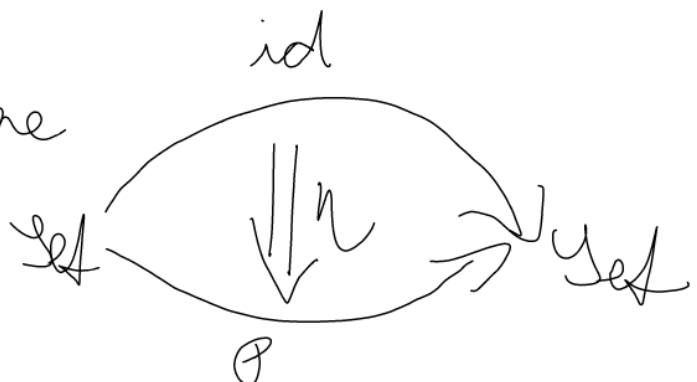


komutoval

ako „priradené“ zobrazit  $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ?

$$n_x(a) = \{a\}$$

Vyrobiti sme



Existuje prirodzená transformácia  
naopak? Nie, z triviálnych dôvodov

$$\begin{array}{ccc} P(\emptyset) & \xrightarrow{\alpha_\emptyset} & \emptyset \\ \parallel & & \\ \{\emptyset\} & \text{- neprázdna} & \\ & \text{množina} & \end{array}$$

Skúsme niečo iné:

$$\begin{array}{ccc} \text{Set} & \xrightarrow{\alpha} & \text{Set} \\ \downarrow \alpha & & \\ \text{Set} & \xrightarrow{\alpha} & \text{Set} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} P^2(X) & \xrightarrow{\varepsilon_X} & P(X) \\ \downarrow P^2(F) & & \downarrow P(F) \\ P^2(Y) & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & P(Y) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \{X_i\}_{i \in I} & \xrightarrow{\quad} & \bigcup_{i \in I} X_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{F(X_i)\}_{i \in I} & \xrightarrow{\quad} & \bigoplus_{i \in I} F(X_i) \stackrel{?}{=} F\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) \end{array}$$

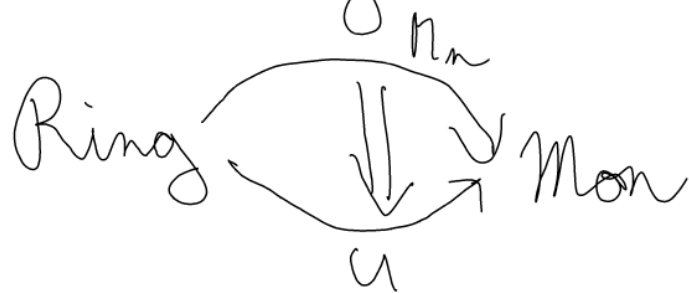
Ato je vlastne to poradenie

Fungovali by prieniky?

# Determinanty ako pár transformácie

Ring : Kategória okruhov s homomorfizmami ako šipkami.

Mon : Kategória monoidov

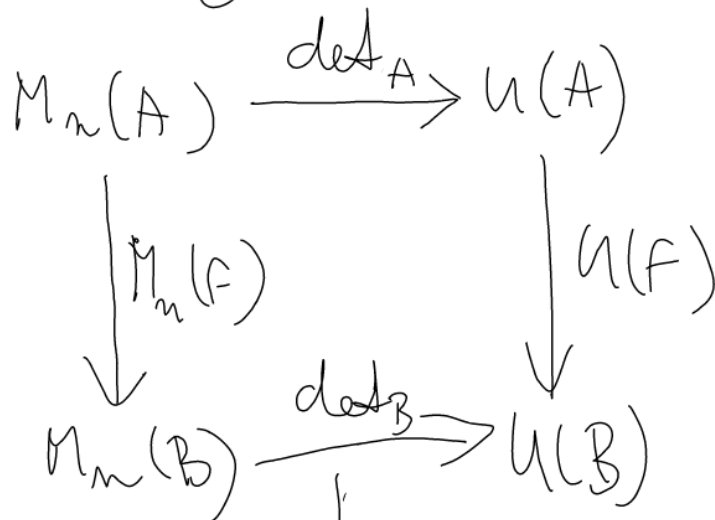


$n \in \mathbb{N}$  fixné

$M_n$  - matice, násobenie

$U$  - redukcia

$A, B$  okruhy  $A \xrightarrow{F} B \approx \text{Ring}$



morfizmus v Mon

Inform:  $\det$  je polynóm!

